Probabilité (Niveau 2A - Objectif ECRICOME)

Partie 1

On considère un jeu de hasard dont la mise pour chaque partie est de 1 euro. L'observation montre qu'une partie est gagnée avec la probabilité $\dfrac{1}{10}$, perdue avec la probabilité $\dfrac{9}{10}$.
Toute partie gagnée rapporte 3 euros. Les différentes parties sont indépendantes. Une personne décide de jouer N parties ($N \geq 2$). On note X_N la variable aléatoire représentant le nombre de parties gagnées et Y_N la variable aléatoire représentant le gain algébrique du joueur.

1. Donner la loi de X_N ainsi que la valeur de l'espérance et de la variance de cette variable.
2. Exprimer Y_N en fonction de X_N. En déduire la valeur de l'espérance et de la variance de Y_N.
3. La personne décide de jouer 60 parties. On admet que l'on peut approcher X_{60} par une loi de Poisson.
   (a) Donner le paramètre de cette loi de Poisson.
   (b) A l'issue des 60 parties, quelle est la probabilité que le joueur perde moins de 50 euros (50 euros inclus) ? (cette probabilité sera impérativement calculée en utilisant l'annexe située à la fin de l'exercice)

Table de Poisson donne les probabilités cumulées : $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$

k	$\lambda = 3$	$\lambda = 4$	$\lambda = 5$	$\lambda = 6$	$\lambda = 7$
0	$0,0498$	$0,0183$	$0,0067$	$0,0025$	$0,0009$
1	$0,1991$	$0,0916$	$0,0404$	$0,0174$	$0,0073$
2	$0,4232$	$0,2381$	$0,1247$	$0,0620$	$0,0296$
3	$0,6472$	$0,4335$	$0,2650$	$0,1512$	$0,0818$
4	$0,8153$	$0,6288$	$0,4405$	$0,2851$	$0,1730$
5	$0,9161$	$0,7851$	$0,6160$	$0,4457$	$0,3007$
6	$0,9665$	$0,8893$	$0,7622$	$0,6063$	$0,4497$
7	$0,9881$	$0,9489$	$0,8666$	$0,7440$	$0,5987$
8	$0,9962$	$0,9786$	$0,9319$	$0,8472$	$0,7291$
9	$0,9989$	$0,9919$	$0,9682$	$0,9161$	$0,8305$
10	$0,9997$	$0,9972$	$0,9863$	$0,9574$	$0,9015$
11	$0,9999$	$0,9991$	$0,9945$	$0,9799$	$0,9467$
12	$1,0000$	$0,9997$	$0,9980$	$0,9912$	$0,9730$
13		$0,9999$	$0,9993$	$0,9964$	$0,9872$
14		$1,0000$	$0,9998$	$0,9986$	$0,9943$
15			$0,9999$	$0,9995$	$0,9976$
16			$1,0000$	$0,9998$	$0,9990$
17				$0,9999$	$0,9996$
18				$1,0000$	$0,9999$
19					$1,0000$
20					

Partie 2

Pour ce jeu, le participant lance successivement n boules au hasard dans N cases numérotées de 1 à N avec $N \geq 2$. On suppose que les différents lancers de boules sont indépendants et que la probabilité pour qu'une boule quelconque tombe dans une case donnée est $\frac{1}{N}$. Une case peut contenir plusieurs boules.
Le gain étant fonction du nombre de cases atteintes, on étudie la variable aléatoire T_n égale au nombre de cases non vides à l'issue des n lancers.

1. Déterminer en fonction de n et de N les valeurs prises par T_n.
2. Donner les lois de T_1 et T_2.
3. Déterminer, lorsque $n \geq 2$, la probabilité des événements $[T_n = 1], [T_n = 2]$, $[T_n = n]$. (pour la dernière probabilité on distinguera deux cas $n > N$ et $n \leq N$).
4. A l'aide de la formule des probabilités totales, justifier l'égalité (I) suivante, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$,
$$(I) \qquad P([T_{n+1} = k]) = \frac{k}{N} P([T_N = k]) + \frac{N-k+1}{N} P([T_n = k-1])$$
5. Afin de calculer l'espérance $E(T_n)$ de la variable T_n, on considère la fonction polynomiale G_n définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G_n(x) = \sum_{k=1}^{n} P([T_n = k]) x^k$$
   (a) Quelle est la valeur de $G_n(1)$?
   (b) Exprimer $E(T_n)$ en fonction de $G'_n(1)$.
   (c) En utilisant la relation (I), montrer que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G_{n+1}(x) = \frac{1}{N}(x - x^2) G'_N(x) + x G_n(x)$$
   (d) En dérivant l'expression précédente, en déduire que :
   $$E(T_{n+1}) = (1 - \frac{1}{N}) E(T_n) + 1$$
   (e) Prouver enfin que l'espérance de la variable T_n est donnée par :
   $$E(T_n) = N \left[1 - \left(1 - \frac{1}{N} \right)^n \right]$$